

LAHENDUSED 9.klass

1. Vastus: 14 km/h

Lahendus

Olgu x m/min Alexi esialgne kiirus ja y m/min Kevini kiirus.

Sellest, et Kevin jooksis Alexist mööda iga 2 minuti tagant, saame võrrandi $200 = 2(y - x)$.

Kui Alexi kiirus oli $2x$ m/min, siis Alex jooksis Kevinist mööda iga 6 minuti tagant. Saame võrrandi $200 = 6(2x - y)$.

Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 200 = 2(y - x) \\ 200 = 6(2x - y) \end{cases}$$

saame, et Kevini kiirus on $y = \frac{700}{3}$ m/min ehk 14 km/h.

Hindamine

võrrandite koostamine (iga tingimusele vastav võrrand – 2 punkti)	4 p
õige koostatud võrrandisüsteemi lahendamine	2 p
õige vastus (kiiruse ühikuks on km/h)	<u>1 p</u>
	7p

NB! Ainult õige vastuse eest anda 2 punkti.

2. Vastus. a) ei; b) jah

Lahendus 1

Teame, et kui naturaalarvud m ja n lõpevad ühe ja sama numbriga, siis nende vahe $m - n$ lõpeb numbriga 0 (teisisõnu, jagub 10-ga).

a) vastus „ei“, piisab näitest $a = 1$ ja $b = 6$ (või teisest sobivast näitest), mille korral mõlemad arvud $a + 3b = 19$ ja $b + 3a = 9$ lõpevad numbriga 9.

Kuidas selle näiteni jõuda? Vaatleme vahet $(a + 3b) - (b + 3a) = 2(b - a)$. See peab 0-ga lõppema, st $b - a$ peab lõppema kas 0-ga või 5-ga. Juhul, kui $b - a$ lõpeb 0-ga, siis arvud a ja b lõpevad ühe ja sama numbriga. Juhul kui $b - a$ lõpeb 5-ga, siis a ja b lõpevad erinevate numbritega (st a ja b ei pea ühe ja sama numbriga lõppema). Näideteks sobivad kõik naturaalarvude paarid (a, b) , kus arvude a ja b lõpunumbrid on mingis järjestuses 0 ja 5 või 1 ja 6 või 2 ja 7 või 3 ja 8 või 4 ja 9.

b) vastus „jah“

Analoogiliselt vaatleme vahet $(2a + 5b) - (2b + 5a) = 3(b - a)$. See peab 0-ga lõppema, st ka vahe $b - a$ peab 0-ga lõppema. See tähendabki, et arvud a ja b peavad lõppema ühe ja sama numbriga.

Lahendus 2

a) teine võimalus, et näiteni jõuda

Teame, et arvud $a + 3b$ ja $b + 3a$ lõpevad ühe ja sama numbriga. Lahutades mõlemast arvust $a + b$ saame, et ka arvud $2a$ ja $2b$ peavad lõppema ühe ja sama numbriga.

Koostame tabeli arvude a ja $2a$ võimalike lõpunumbrite saamiseks:

a lõpunumber	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2a$ lõpunumber	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8

Tabelist järeldub, et kui arvud $2a$ ja $2b$ lõpevad ühe ja sama numbriga, siis ei pruugi arvud a ja b lõppema sama numbriga. Näiteks kui mõlemad arvud $2a$ ja $2b$ lõpevad numbriga 2, siis arvud a ja b võivad lõppeda erinevate numbritega 1 ja 6. Võttes, näiteks, $a = 1$ ja $b = 6$ saamegi sobivat näidet.

b) Kuna arvud $2a + 5b$ ja $2b + 5a$ lõpevad ühe ja sama numbriga, siis (lahutades mõlemast $2a + 2b$) ka arvud $3a$ ja $3b$ peavad lõppema ühe ja sama numbriga.

Koostame tabeli arvude a ja $3a$ võimalike lõpunumbrite saamiseks:

a lõpunumber	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3a$ lõpunumber	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

Tabelist näeme, et kui arvud $3a$ ja $3b$ lõpevad ühe ja sama numbriga, siis ka arvud a ja b peavad lõppema ühe ja sama numbriga.

Hindamine

a) osa

eitav vastus + näide

3 p

b) osa

järeldatud, et arvud $3a$ ja $3b$ peavad lõppema ühe ja sama numbriga
(või nende vahe $3b - 3a = 3(b - a)$ peab lõppema numbriga 0)

2 p

põhjendatud, et arvud a ja b peavad sel juhul lõppema ühe ja sama numbriga
(kas arvude $3a$ ja $3b$ lõpunumbrite abil või nt jaguvuse abil)

2 p

7p

NB! Kui mõlema osa vastused on õiged kuid a) osas puudub näide ja b) osa vastus on põhjendamata, siis kokku anda 1 punkt.

3. Vastus. 36

Lahendus

Kirjutame näiteks arvuga 2 kõrvalolevasse sektori arvu x . Siis peavad järjest olema sektoritesse kirjutatud järgmised arvud:

$$2, x, \frac{x}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x}, \frac{2}{x}, 2, x, \dots$$

Näeme, et kuue kaupa arvud hakkavad korduma ja ringi igat arvu kirjutatakse 3 korda.

Päripäeva vaadates saame, et $6 = x$ ja need kuus arvu on $2, 6, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$.

Vastupäeva vaadates saame, et $6 = \frac{2}{x}$ ehk $x = \frac{1}{3}$ ja need kuus arvu on $2, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 3, 6$.

Näeme, et igal juhul on ringi kirjutatud ühed ja samad arvud. Nende summa on

$$3 \left(2 + 6 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot 12 = 36.$$

Hindamine

Põhjendatud, et sektoritesse kirjutatud arvud on kujul $x, y, \frac{y}{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{x}{y}$

(sh leitud arvud 2p + märkus, et korduvad kuue kaupa 1p)

3 p

(siin x või y võib olla asendatud kas arvuga 2 või arvuga 6)

Leitud, et sektoritesse on kirjutatud 6 erinevat arvu $(2, 6, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$

ning igaüks neist on kirjutatud kolm korda

3 p

(sh arvestatud nii päripäeva kui ka vastupäeva liikumisega: 1 punkt)

Leitud kõikide arvude summa

1 p

7p

NB! Ainult õige vastuse eest anda 2 punkti

4. Vastus. 3, 4, 5, 6, 7, 8 või 9

Lahendus.

Kui pärast jaotamist on kõik tikud kolmes toosis ja neid on seal võrdselt, siis igas toosis on 9 tikku. See tähendab, et igas tikutoosis ei saa olla rohkem kui 9 tikku.

Kui igas tikutoosis on vähem kui 9 tikku, siis tikkude koguarv on ülimalt $8 + 7 + 6 + 5 = 26 < 27$. See tähendab, et ühes tikutoosis peab olema 9 tikku.

Järelikult kolmes ülejäänud tikutoosis on ülimalt 8 tikku ja kokku on seal $27 - 9 = 18$ tikku.

Kui neist ühes tikutoosis on 8 tikku, siis kahes ülejäänud toosis kokku on 10 tikku. Selleks on kaks võimalust: nendes on kas 7 ja 3 või 6 ja 4 tikku.

Kui neist kolmest tikutoosist on igas vähem kui 8 tikku, siis neis kokku on ülimalt $7 + 6 + 5 = 18$ tikku. See ongi kolmas võimalus.

Kokkuvõttes oleme saanud, et tikkude arvud neljas tikutoosis saavad olla 9, 8, 7, 3 või 9, 8, 6, 4 või 9, 7, 6, 5 tikku. Järelikult ühes tikutoosis saab olla 3 kuni 9 tikku.

Hindamine

põhjendatud, et igas tikutoosis ei saa olla rohkem kui 9 tikku	1 p
põhjendatud, et ühes tikutoosis peab olema vähemalt 9 tikku	1 p
järeldatud, et ühes tikutoosis peab olema täpselt 9 tikku ja teistes toosides on tikke vähem	1 p
leitud kõik kolm võimalust tikkude jaotamiseks nelja tikutoosi vahel (iga võimalus - 1 punkt)	3 p
järeldatud vastus	<u>1 p</u>
	7p

NB! Ainult õige vastus annab 2 punkti.

5. Vastus. 80 cm²

Lahendus.

Tõmbame punktist D sirgele BC ristlõiku DF . Siis tekib ristkülik $BFDE$.

Näitame, et kolmnurgad AED ja CFD on sarnased. Kuna mõlemad kolmnurgad on täisnurksed, siis tuleb leida veel ühte võrdsete nurkade paari.

Kuna nelinurgas $ABCD$ on $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, siis kahe ülejäänud nurga suuruste summa on 180° , st $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Avaldame nurga DCF suuruse:

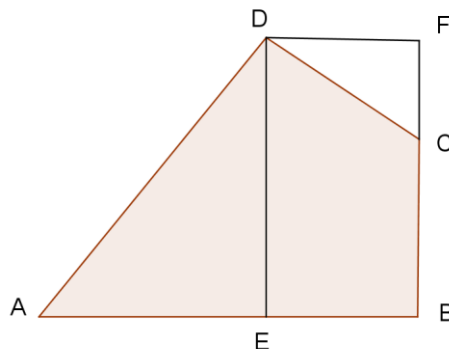
$$\angle DCF = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAD) = \angle BAD = \angle DAE.$$

Järelikult kolmnurgad AED ja CFD on sarnased sarnasusteguriga 2, sest vastavad küljed AD ja CD erinevad 2 korda. Seega lõigu DF pikkus on 2 korda väiksem lõigu DE pikkusest 10 cm, st $|DF| = 5$ cm. Järelikult ristküliku $BFDE$ pindala on $10 \cdot 5 = 50$ cm².

Lisaks märgime, et kolmnurkade AED ja CFD pindalad erinevad 4 korda. Olgu $S_{CFD} = x$ cm², siis $S_{AED} = 4x$ cm².

Kuna kujundite ADE ja $BCDE$ pindalad on võrdsed, siis saame võrrandi $4x = 50 - x$, millest $x = 10$ cm².

Lõpuks saame, et $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{AED} = 2 \cdot 4x = 8x = 80$ cm².



Hindamine

konstrueeritud kolmnurgaga ADE sarnane kolmnurk (tõmmatud ristlõik kas punktist D sirgele BC või punktist C sirgele DE)	1 p
põhjendatud kolmnurkade sarnasus ja leitud nende sarnasustegur	2 p
leitud lõigu BE või sellega võrdse lõigu (nt lahenduses lõigu DF) pikkus	1 p
märgitud, et sarnasusteguriga 2 kolmnurkade pindalad erinevad 4 korda	1 p
arvutatud nelinurga $ABCD$ pindala	2 p

NB! Ainult õige vastus annab 2 punkti.